

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г. г.
Заключительный этап **11 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

11.1. Найти все пары действительных чисел a и b , удовлетворяющих системе уравнений.

$$\begin{cases} a = \frac{6}{a+b}, \\ b = \frac{5}{3a-b}. \end{cases}$$

11.2. Доказать, что для всех положительных действительных чисел a и b выполнено неравенство: $\frac{a(a+1)}{b+1} + \frac{b(b+1)}{a+1} \geq a + b$.

11.3. В остроугольном треугольнике ABC с углом 60° при вершине B , обозначим за O центр описанной окружности, за H – точку пересечения высот. Прямая OH пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Доказать, что треугольник KBM – равносторонний.

11.4. Найти все тройки натуральных чисел a, b, c таких, что числа $ab + 1, ac + 1, bc + 1$ являются факториалами некоторых натуральных чисел. Числа в тройках могут совпадать. Напоминаем, что *факториалом* $n!$ натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

11.5. В выпуклом n – угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники, и не пересекающиеся по внутренним точкам. При этом из каждой вершины выходит чётное, может быть нулевое, количество диагоналей. Доказать, что это возможно тогда и только тогда, когда n делится на 3.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г. г.
Заключительный этап **11 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

11.1. Найти все пары действительных чисел a и b , удовлетворяющих системе уравнений.

$$\begin{cases} a = \frac{6}{a+b}, \\ b = \frac{5}{3a-b}. \end{cases}$$

11.2. Доказать, что для всех положительных действительных чисел a и b выполнено неравенство: $\frac{a(a+1)}{b+1} + \frac{b(b+1)}{a+1} \geq a + b$.

11.3. В остроугольном треугольнике ABC с углом 60° при вершине B , обозначим за O центр описанной окружности, за H – точку пересечения высот. Прямая OH пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Доказать, что треугольник KBM – равносторонний.

11.4. Найти все тройки натуральных чисел a, b, c таких, что числа $ab + 1, ac + 1, bc + 1$ являются факториалами некоторых натуральных чисел. Числа в тройках могут совпадать. Напоминаем, что *факториалом* $n!$ натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

11.5. В выпуклом n – угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники, и не пересекающиеся по внутренним точкам. При этом из каждой вершины выходит чётное, может быть нулевое, количество диагоналей. Доказать, что это возможно тогда и только тогда, когда n делится на 3.